

初等模型 (续)

信息学院 (智能应用研究院)

欧 新 宇

第03讲 简单的优化模型

优化——工程技术、经济管理、科学研究中的**常见问题**.

材料强度最大

运输费用最低

利润最高

风险最小

用数学建模方法解决优化问题的**过程**

优化**目标与决策**



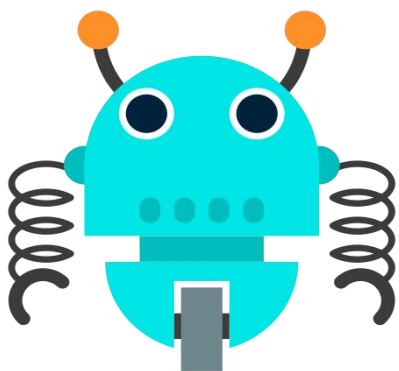
模型**假设与建立**



数学**求解与分析**

简单优化模型归结为**函数极值**问题，用**微分法**求解.

属于数学规划的优化模型在第五讲讨论.



划艇比赛的成绩



存储模型



血管分支



生猪的出售时机



易拉罐形状和尺寸的最优设计



估计出租车的总数

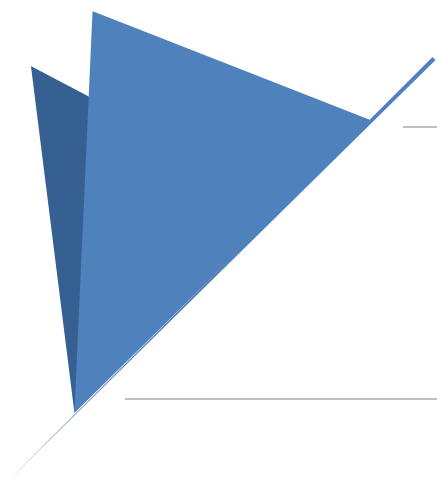


社会经济系统的冲量过程



公平的席位分配





划艇比赛的成绩

/

划艇比赛的成绩

问题提出



问题 对四种赛艇 (单人、双人、四人、八人) 4次国际大赛冠军的成绩进行比较, 发现与桨手数有某种关系. 试建立数学模型揭示这种关系.

赛艇中 种类	2000m 成绩 t (min)					艇长 l (m)	艇宽 b (m)	l/b	$\frac{\text{空艇重 } w_0(kg)}{\text{桨手数 } n}$
	1	2	3	4	平均				
单人	7.16	7.25	7.28	7.17	7.21	7.93	0.293	27.0	16.3
双人	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
四人	6.33	6.42	6.48	6.13	6.32	11.75	0.574	21.0	18.1
八人	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.610	30.0	14.7

准备 调查赛艇的尺寸和质量 $\Rightarrow l/b, w_0/n$ 基本不变

划艇比赛的成绩

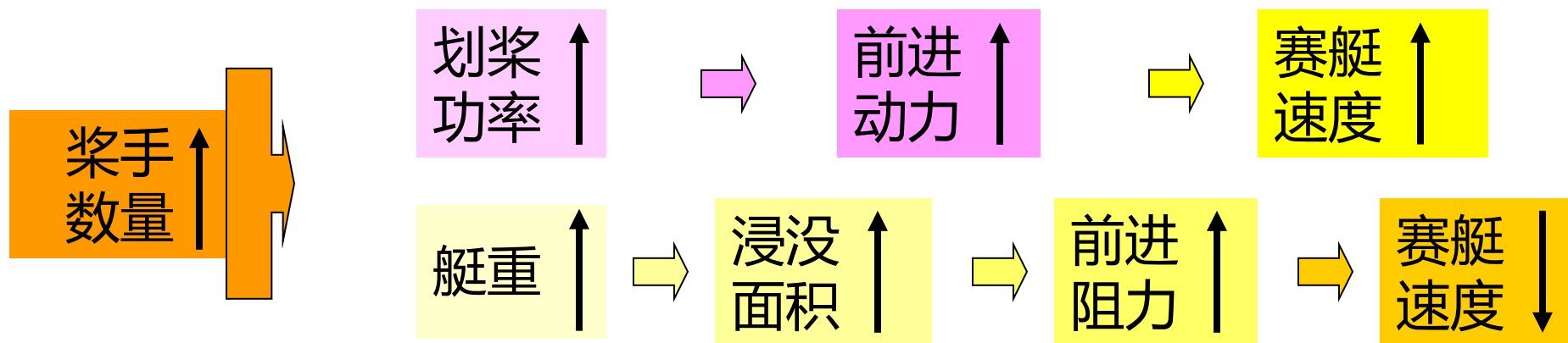


问题分析

问题分析 分析赛艇速度与桨手数量之间的关系

赛艇速度由前进动力和前进阻力决定:

- 前进动力 $\sim$ 桨手的划桨功率
- 前进阻力 $\sim$ 浸没部分与水的摩擦力



- 对桨手体重、功率、阻力与艇速的关系等作出假定.
- 运用合适的物理定律建立模型.

划艇比赛的成绩

模型假设



符号：艇速 v ，浸没面积 s ，浸没体积 A ，空艇重 w_0 ，阻力 f ，桨手数 n ，桨手功率 p ，桨手体重 w ，艇重 W 。

1) 艇形状相同($1/b$ 为常数), w_0 与 n 成正比

艇的静态特性

2) v 是常数，阻力 f 与 sv^2 成正比

艇的动态特性

3) w 相同， p 不变， p 与 w 成正比

桨手的特征

模型
建立

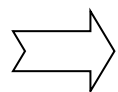
$$np \propto fv, \quad f \propto sv^2, \quad p \propto w$$

$$\Rightarrow v \propto (n/s)^{1/3}$$

$$s^{1/2} \propto A^{1/3}, \quad A \propto W(=w_0+nw) \propto n$$

$$\Rightarrow s \propto n^{2/3}$$

$$\Rightarrow v \propto n^{1/9}$$



$$\text{比赛成绩 } t \propto n^{-1/9}$$

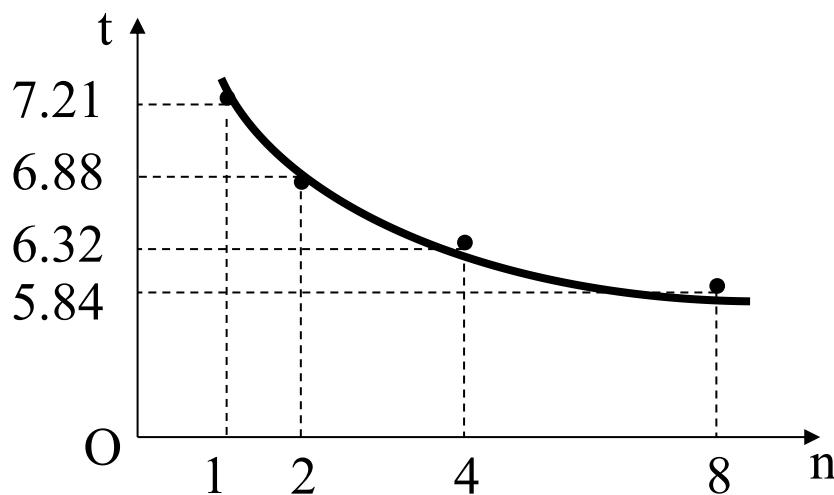
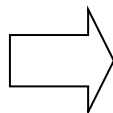
划艇比赛的成绩

模型检验

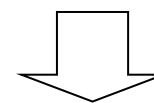


利用4次国际大赛冠军的平均成绩对模型 $t \propto n^{-1/9}$ 进行检验.

n	t
1	7.21
2	6.88
4	6.32
8	5.84



$$t = an^b$$



$$\log t = a' + b \log n$$

线性最小二乘法

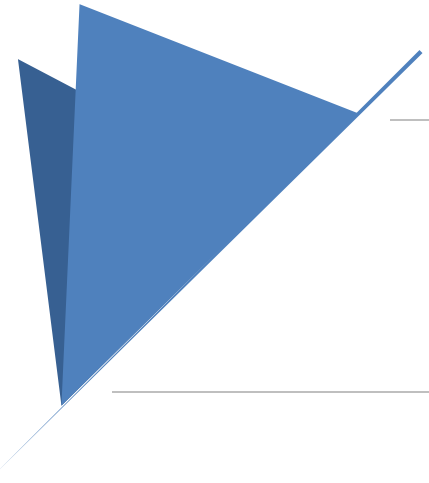
$$t = 7.21n^{-0.11}$$

与模型吻合!

小结与评注



- 对实际数据做比较、分析，发现并提出问题.
- 利用物理基本知识分析问题.
- 模型假设比较粗糙.
- 利用合适的物理定律及简单的比例方法建模(只考虑各种艇的相对速度).
- 模型结果与实际数据十分吻合 (巧合!)



估计出租车的总数

/

估计出租车的总数

问题提出

一些人喜欢记驶过身旁的汽车号码.

两难境地的决策

与朋友打赌的“骰子”

共识：出现任何号码汽车的机会相同.

随意记下驶过的10辆出租车牌号：0421, 0128, 0702, 0410, 0598, 0674, 0712, 0529, 0867, 0312

出租车牌号从某一个数字0101按顺序发放.

估计这座城市出租车的总数.

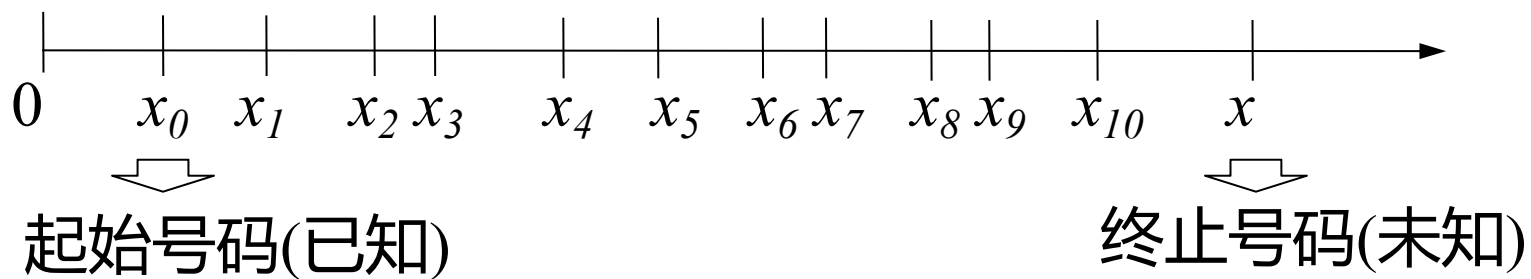
估计出租车的总数

问题分析

10个号码从小到大重新排列.

$[x_0, x]$ 区间内全部整数值 $\sim$ 总体

$x_1, x_2, \dots, x_{10} \sim$ 总体的一个样本



根据样本和 x_0 对总体的 x 作出估计。



出租车总数为 $x - x_0 + 1$

估计出租车的总数

模型建立

模型建立

起始号码 x_0 平移为 0001

总体 $\sim$ 全部号码 $\{0001, 0002, \dots, x\}$

$x \sim$ 出租车总数

样本 $\sim$ 总体中的 n 个号码从小到大排列 $x_1, x_2, \dots, x_n$

建立由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 估计 x 的模型

基本假定： 每个 x_i 取自总体中任一号码的概率相等。

估计出租车的总数

模型建立

模型1：平均值模型

$\bar{x}$ ~ 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$\bar{X}$ ~ 总体 $0001, 0002, \dots, x$ 的平均值

$$\bar{X} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^x j = \frac{x+1}{2}$$

用 $\bar{x}$ 估计 $\bar{X}$ $\Rightarrow \bar{x} = \bar{X}$ $\Rightarrow x = 2\bar{x} - 1$

$\bar{x}$ 较大 $\Rightarrow x \approx 2\bar{x}$ 总数是样本均值的2倍

估计出租车的总数

模型建立

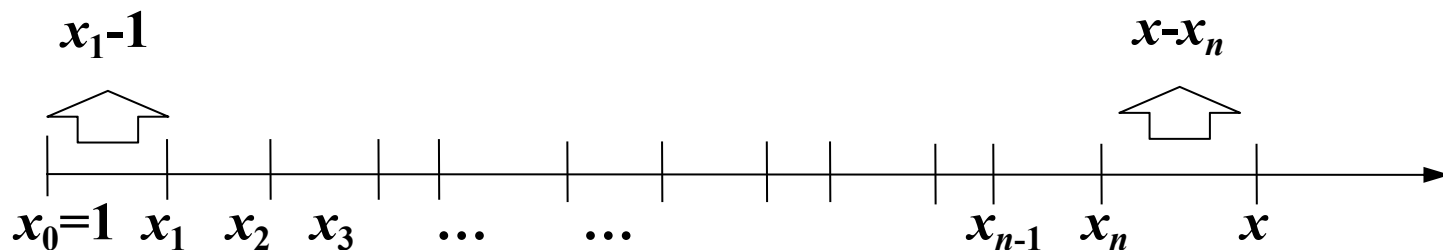
模型2：中位数模型

$$\tilde{x} \sim \text{样本中位数} \quad \tilde{X} \sim \text{总体中位数} \quad \tilde{X} = \bar{X} = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{用 } \tilde{x} \text{ 估计 } \tilde{X} \quad \tilde{x} = \tilde{X} = \frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2\tilde{x} - 1 \approx 2\tilde{x}$$

模型3：两端间隔对称模型

假定：样本的最小值与最大值在总体中对称。



$$x_1 - 1 = x - x_n \quad \Rightarrow \quad x = x_n + x_1 - 1 \approx x_n + x_1$$

估计出租车的总数

模型建立

模型4：平均间隔模型

把起始号码和样本排成数列： $1, x_1, x_2, \dots, x_n$,

相邻两数有 n 个间隔： $x_1-1, x_2-x_1-1, \dots, x_n-x_{n-1}-1$

n 个间隔的平均值 $\Rightarrow$ 作为 x_n 与 x 间隔的估计

$$\frac{1}{n} \left[(x_1 - 1) + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1} - 1) \right] = \frac{x_n - n}{n} \quad \Downarrow \quad = x - x_n$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(1 + \frac{1}{n} \right) x_n - 1 \quad \approx \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right) x_n$$

估计出租车的总数

模型建立

模型5：区间均分模型

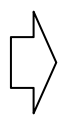
将总体区间 $[1, x]$ 平均分成 n 份.

每个小区间长度 $\frac{x-1}{n}$

假定：样本中每个 x_i 都位于小区间的中点.

$x - x_n$ 应是小区间长度的一半

$$x - x_n = \frac{x-1}{2n}$$



$$x = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \left(x_n - \frac{1}{2n}\right)$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{2n}\right) x_n$$

估计出租车的总数

计算与分析

设定 $x_0 = 0001$

第1样本: 0321, 0028, 0602, 0310, 0498, 0574, 0612, 0429, 0767, 0212

第2样本: 0249, **0739** 0344, 0148, 0524, 0284, 0351, 0089, 0206, 0327

	用5个模型估计出租车总数 x					
	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5	最大相差
第1样本	870	926	794	843	807	134
第2样本	651	610	827	812	778	217
相差	221	316	33	31	29	

不稳定 (相差大)

不合理 ($x = 651, 610 < 739$)

估计出租车的总数

计算与分析

1. 平均值模型 $x \approx 2\bar{x}$

用全部样本, 有统计依据

结果可能 $x < x_n$

2. 中位数模型 $x \approx 2\tilde{x}$

用 $\tilde{x}$, 有统计依据, 可能 $x < x_n$

3. 两端间隔对称模型 $x \approx x_n + x_1$

用 x_n, x_1 , 直观, $x > x_n$

4. 平均间隔模型 $x \approx (1 + \frac{1}{n})x_n$

只用 x_n , 直观, $x > x_n$

5. 区间均分模型 $x \approx (1 + \frac{1}{2n})x_n$

只用 x_n , 直观, $x > x_n$

估计出租车的总数

数值模拟

- 给定总体 $\{1, 2, \dots, x\}$, $x = 1000$
- 从总体中取 $n=10$ 个数为一个样本, 共 $m=200$ 个样本
- 用5个模型分别对每个样本估计总体 x .
- 对每个模型计算 m 个样本估计的 x 的 **平均值**、**标准差** 及平均值与 **真值** $x = 1000$ 间的 **误差**
- 样本估计结果与总体对比, 评价各个模型.
- 画 m 个样本估计的 x 的直方图, 分析 x 的分布.

估计出租车的总数

数值模拟

总体 $x = 1000$ ，每个样本 $n = 10$ ， $m = 200$ 个样本

第1次 模拟		模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
	平均值	1023.2	1037.4	1010.0	1005.6	962.3
	平均值误差	23.2	37.4	10.0	5.6	-37.7
	标准差	170.1	261.0	126.3	90.9	87.0

第2次 模拟		模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
	平均值	986.5	985.4	980.8	992.9	950.1
	平均值误差	-13.5	-14.6	-19.2	-7.1	-49.9
	标准差	181.4	271.1	107.9	86.6	82.8

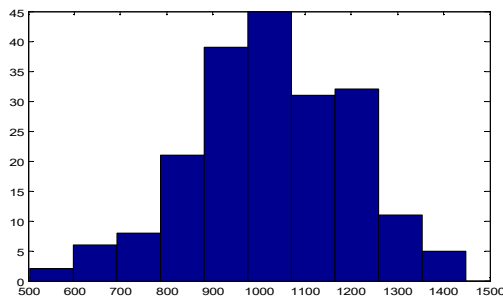
平均值误差大
标准差大

平均值误差小
标准差小

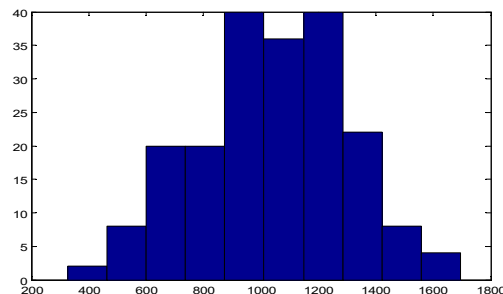
模型4 （平均间隔模型） 较优

估计出租车的总数

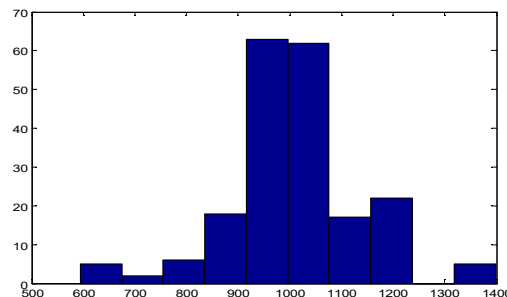
数值模拟 —— 第1次模拟的直方图



模型1

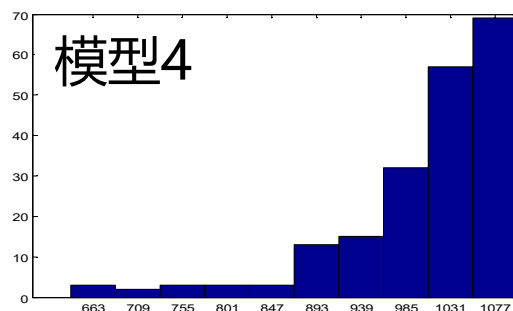


模型2

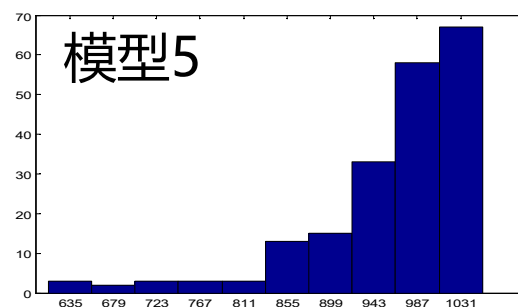


模型3

左右对称型



模型4



模型5

左低右高的非对称型

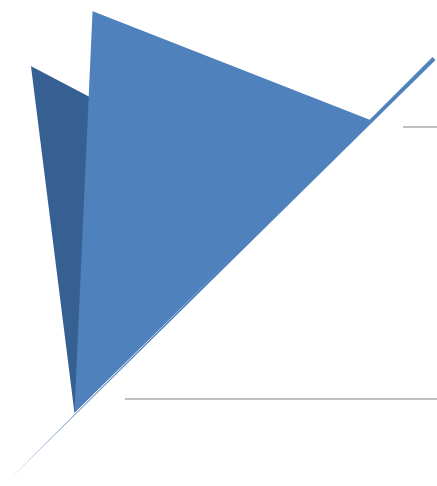
估计出租车的总数

小结与评注

- 5个模型中平均值和中位数模型用到一点统计, 其他3个模型来自常识, 后者竟然较前者更优.
- 模型中起始号码已知(平移至1), 限制了应用范围.

问题: 哪些模型可以推广到起始号码未知的情况?

- 数值模拟是模型检验的重要方法: 给定总体通过模拟产生样本, 根据模型得到总体参数, 进行比较和评价.



存贮模型

/

存贮模型

问题提出

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费. 该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出.

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元. 试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小.

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系.

存贮模型

问题分析与思考



- 日需求100件, 准备费5000元, 贮存费每日每件1元.
 - ✓ 每天生产一次, 每次100件, 无贮存费, 准备费5000元. 每天费用5000元
 - ✓ 10天生产一次, 每次1000件, 贮存费 $900+800+\dots+100=4500$ 元, 准备费5000元, 总计9500元. 平均每天费用950元
 - ✓ 50天生产一次, 每次5000件, 贮存费 $4900+4800+\dots+100=122500$ 元, 准备费5000元, 总计127500元. 平均每天费用2550元

10天生产一次, 平均每天费用最小吗?

问题分析与思考



- 周期短, 产量小



贮存费少, 准备费多

- 周期长, 产量大



准备费少, 贮存费多



存在最佳的周期和产量, 使总费用 (二者之和) 最小.

- 是一个优化问题, 关键在建立目标函数.

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数.

目标函数——每天总费用的平均值.

存贮模型

模型假设



1. 产品每天的需求量为常数 r ;
2. 每次生产准备费为 c_1 , 每天每件产品贮存费为 c_2 ;
3. T 天(一周期)生产一次, 每次生产 Q 件, 当贮存量降为零时, Q 件产品立即生产出来 (生产时间不计);
4. 为方便起见, 时间和产量都作为连续量处理.

建模目的:

r, c_1, c_2 已知, 求 T, Q 使每天总费用的平均值最小.

存贮模型

模型建立——离散问题连续化

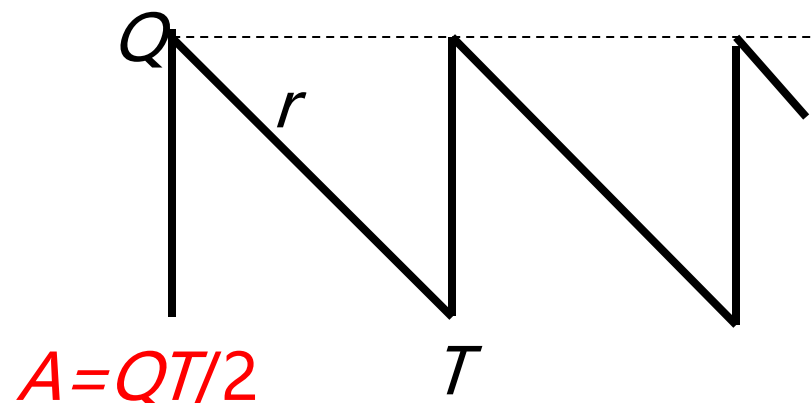
贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

$t=0$ 生产 Q 件, $q(0) = Q$,

$q(t)$ 以需求速率 r 递减, $q(T)=0$.



$$Q = rT$$



一周期贮存费为

$$c_2 \int_0^T q(t) dt = c_2 \frac{QT}{2}$$

一周期
总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2 \frac{QT}{2}$$

$$= c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值 (目标函数)

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2}$$

存贮模型

模型求解



模型求解

✓ 求 T 使 $C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} \rightarrow \min$

$$\frac{dC}{dT} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型解释

✓ 定性分析 $c_1 \uparrow \Rightarrow T, Q \uparrow$ $c_2 \uparrow \Rightarrow T, Q \downarrow$ $r \uparrow \Rightarrow T \downarrow, Q \uparrow$

✓ 敏感性分析 参数 c_1, c_2, r 的微小变化对 T, Q 的影响

T 对 c_1 的(相对)敏感度

$$S(T, c_1) = \frac{\Delta T / T}{\Delta c_1 / c_1} \approx \frac{dT}{dc_1} \frac{c_1}{T} = \frac{1}{2}$$

c_1 增加1%,
 T 增加0.5%

$$S(T, c_2) = -1/2, S(T, r) = -1/2$$

c_2 或 r 增加1%, T 减少0.5%

存贮模型

模型应用



$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \quad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$$

● 回答原问题

$$c_1 = 5000, \quad c_2 = 1, \quad r = 100$$

$$\Rightarrow T = 10(\text{天}), \quad Q = 1000(\text{件}), \quad C = 1000(\text{元})$$

思考: 为什么与前面计算的 $C=950$ 元有差别?

● 用于订货供应情况: 每天需求量 r , 每次订货费 c_1 , 每天每件贮存费 c_2 , T 天(周期)订货一次, 每次订货 Q 件, 当贮存量降到零时, Q 件立即到货.

经济批量订货公式(EOQ公式)

不允许缺货的存贮模型

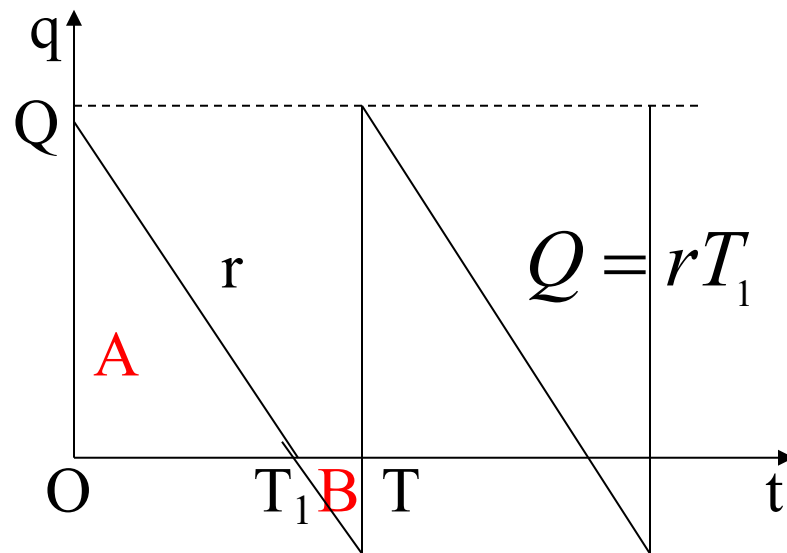
存贮模型

允许缺货的存贮模型

当贮存量降到零时仍有需求 r , 出现缺货, 造成损失.

✓ **原假设:** 贮存量降到零时 Q 件立即生产出来(或立即到货).

✓ **现假设:** 允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足.



周期 T , $t = T_1$ 贮存量降到零

一周期
贮存费

$$c_2 \int_0^{T_1} q(t) dt = c_2 A$$

一周期
缺货费

$$c_3 \int_{T_1}^T |q(t)| dt = c_3 B$$

一周期总费用

$$\bar{C} = c_1 + c_2 \frac{QT_1}{2} + c_3 \frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

存贮模型

允许缺货的存贮模型

一周期总费用: $\bar{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2QT_1 + \frac{1}{2}c_3r(T - T_1)^2$

每天总费用平均值:
(目标函数)

$$C(T, Q) = \frac{\bar{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2rT}$$

求 T, Q

$$C(T, Q) \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

为与不允许缺货的存贮模型相比,
 T 记作 T' , Q 记作 Q' .

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

存贮模型

允许
缺货
模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

不允许
缺货
模型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

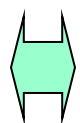
记

$$\mu = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$$

不允许
缺货

$$\mu > 1 \Rightarrow T' > T, \quad Q' < Q \quad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$$



$$c_3 \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow T' \rightarrow T, \quad Q' \rightarrow Q$$

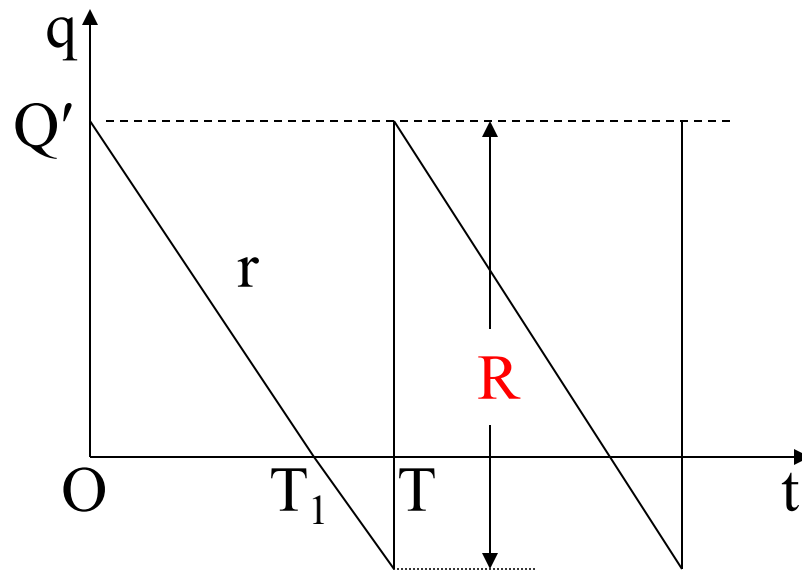
存贮模型

允许缺货的存贮模型

允许
缺货
模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q' ~每周期初的存贮量

每周期的生产量 R (或订货量)

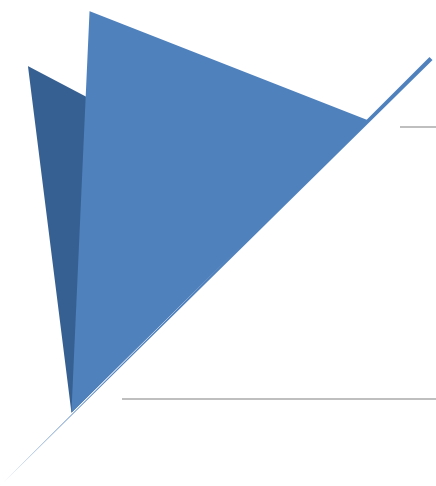
$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$R = \mu Q > Q$$

Q ~不允许缺货时的产量(或订货量)

小结与评注

- 存贮模型(EOQ公式)是研究批量生产计划的重要理论基础, 也有实际应用.
- 建模中未考虑生产费用, 为什么?在什么条件下可以不考虑?
- 建模中假设生产能力为无限大(生产时间不计), 如果生产能力有限(是大于需求量的常数), 应作怎样的改动?



血管分支

/

血管分支

问题提出



背景

机体提供能量维持血液在血管中的流动.

给血管壁以营养. 克服血液流动的阻力.

消耗能量与取决于血管的几何形状.

在长期进化中动物血管的几何形状已经达到能量最小原则.

问题

在能量最小原则下, 血管分支处粗细血管半径比例和分岔角度.

血管分支

模型假设

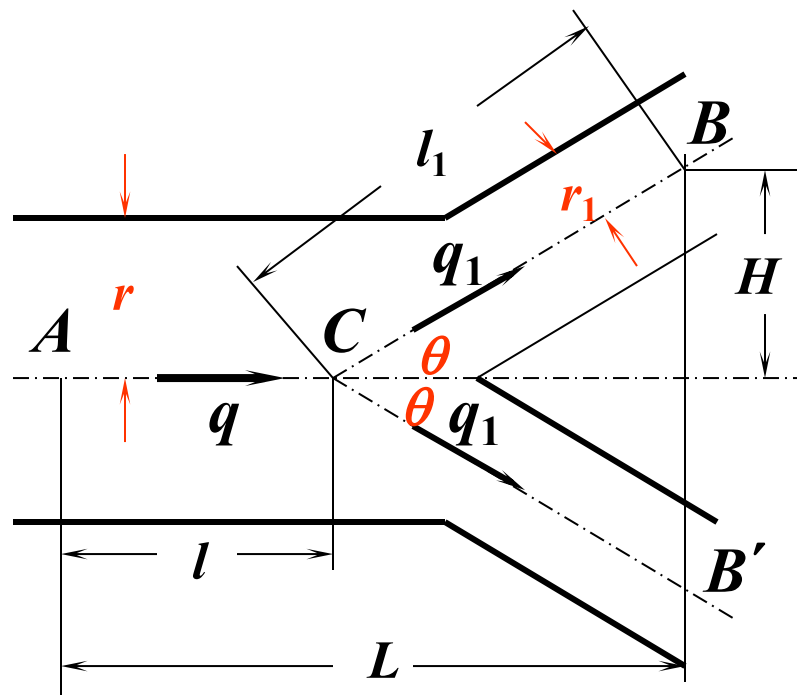
一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面。

血液流动近似于黏性流体在刚性管道中的运动。

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度 d 近似与血管半径 r 成正比。

考察血管 AC 与 CB , CB'

$$q = 2q_1 \quad r/r_1, \theta?$$



血管分支

模型假设

黏性流体在刚性
管道中运动

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

$\Delta p \sim A, C$ 压力差, $\mu \sim$ 黏性系数

克服阻力消耗能量 E_1

$$E_1 = q \Delta p = \frac{8 \mu q^2 l}{\pi r^4}$$

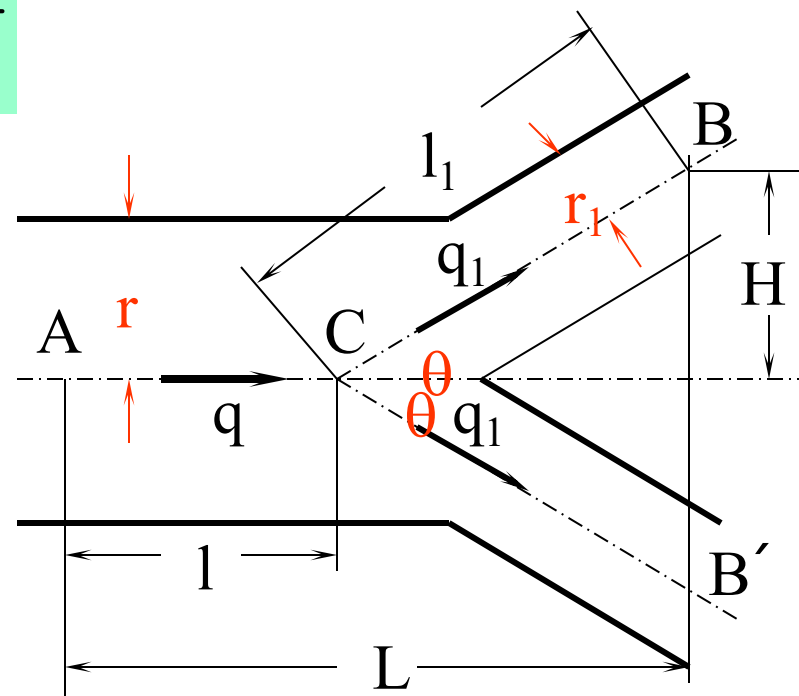
提供营养消耗能量 E_2

管壁内表面积 $2\pi r l$

管壁体积 $\pi(d^2 + 2rd)l$,

管壁厚度 d 与 r 成正比

$$E_2 = b r^\alpha l, 1 \leq \alpha \leq 2$$



血管分支

模型建立

✓ 克服阻力消耗能量

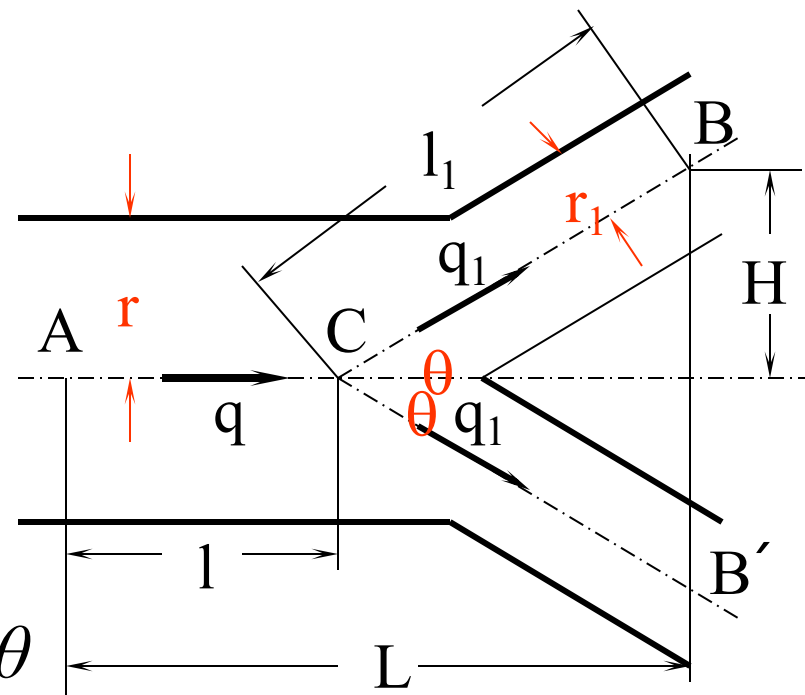
$$E_1 = q \Delta p = \frac{8 \mu q^2 l}{\pi r^4}$$

✓ 提供营养消耗能量

$$E_2 = b r^\alpha l, 1 \leq \alpha \leq 2$$

机体为血流提供能量

$$l = L - H / \tan \theta, l_1 = H / \sin \theta$$



$$E = E_1 + E_2 = (k q^2 / r^4 + b r^\alpha) l + (k q_1^2 / r_1^4 + b r_1^\alpha) 2 l_1$$

$$E(r, r_1, \theta) = (k q^2 / r^4 + b r^\alpha) (L - H / \tan \theta) + (k q_1^2 / r_1^4 + b r_1^\alpha) 2 H / \sin \theta$$

血管分支

模型求解

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2 / r^4 + br^\alpha)(L - H / \tan \theta) + (kq_1^2 / r_1^4 + br_1^\alpha)2H / \sin \theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r_1} = 0$$

$$\begin{aligned} b\alpha r^{\alpha-1} - 4kq^2 / r^5 &= 0 \\ b\alpha r_1^{\alpha-1} - 4kq_1^2 / r_1^5 &= 0 \end{aligned}$$

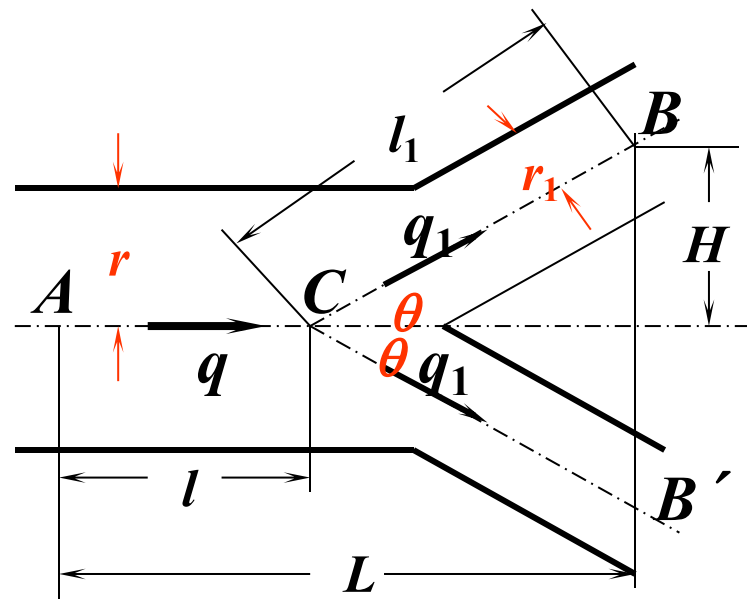
$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = 2 \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-4}$$

$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$\cos \theta = 2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

$$1.26 \leq r / r_1 \leq 1.32, \quad 37^\circ \leq \theta \leq 49^\circ$$



血管分支

模型解释

生物学家：结果与观察大致吻合

推论 大动脉到毛细血管有 n 次分叉

$n=?$

大动脉半径 $r_{\max}$ ，毛细血管半径 $r_{\min}$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管

$$r_{\max} / r_{\min} \approx 1000 \approx 4^5$$



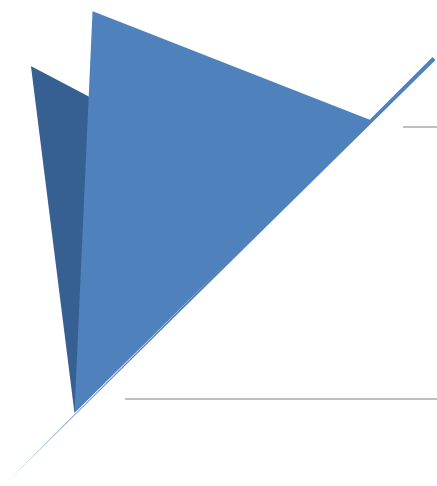
$$n \approx 5(\alpha + 4) \\ 1 \leq \alpha \leq 2$$



$$n \approx 25 \sim 30$$

血管总条数

$$2^n \approx 2^{25} \sim 2^{30} \approx 3 \times 10^7 \sim 10^9$$



生猪的出售时机

/

生猪的出售时机

模型建立



问题

饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，**估计**可使80千克重的生猪体重增加2公斤。

市场价格目前为每千克8元，但是**预测**每天会降低 0.1元，问生猪应何时出售。

如果**估计**和**预测**有误差，对结果有何影响。

分析

投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大

生猪的出售时机

建模及求解



估计 $r = 2$, $g = 0.1$

若当前出售, 利润为 $80 \times 8 = 640$ (元)

t 天
出售

生猪体重 $w = 80 + rt$

销售收入 $R = pw$

出售价格 $p = 8 - gt$

资金投入 $C = 4t$

利润 $Q = R - C = pw - C$

$$Q(t) = (8 - gt)(80 + rt) - 4t$$

求 t 使 $Q(t)$ 最大

$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg} = 10$$

$$Q(10) = 660 > 640$$

10天后出售, 可多得利润20元

生猪的出售时机

敏感性分析



$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg}$$

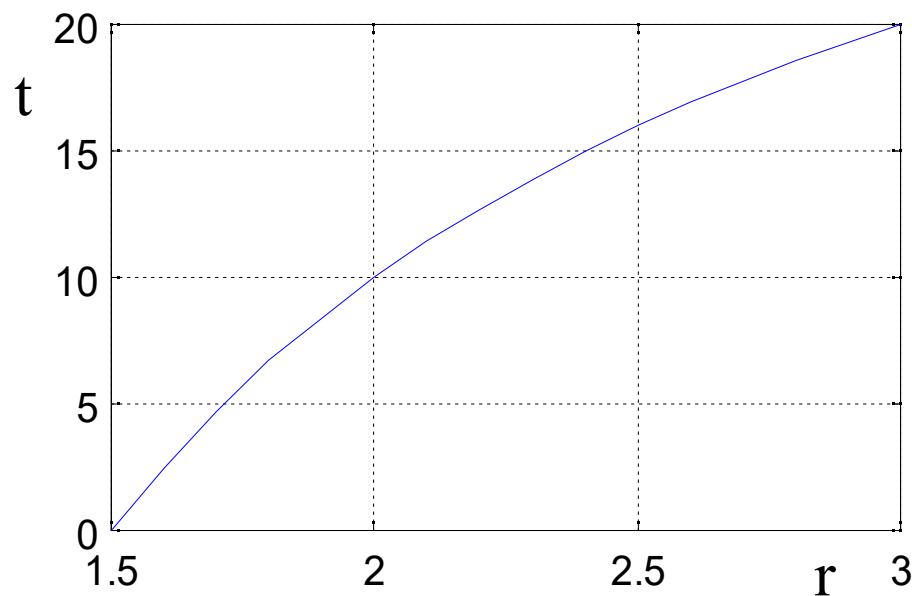
研究 r, g 变化时对模型结果的影响

估计 $r=2, g=0.1$

● 设 $g = 0.1$ 不变 $t = \frac{40r - 60}{r}, r \geq 1.5$

t 对 r 的 (相对) 敏感度

$$S(t, r) = \frac{\Delta t / t}{\Delta r / r} \approx \frac{dt}{dr} \frac{r}{t} \quad S(t, r) \approx \frac{60}{40r - 60} = 3$$



生猪每天体重增加量 r 增加1%，出售时间推迟3%。

生猪的出售时机

敏感性分析



$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg}$$

研究 r, g 变化时对模型结果的影响

估计 $r=2, g=0.1$

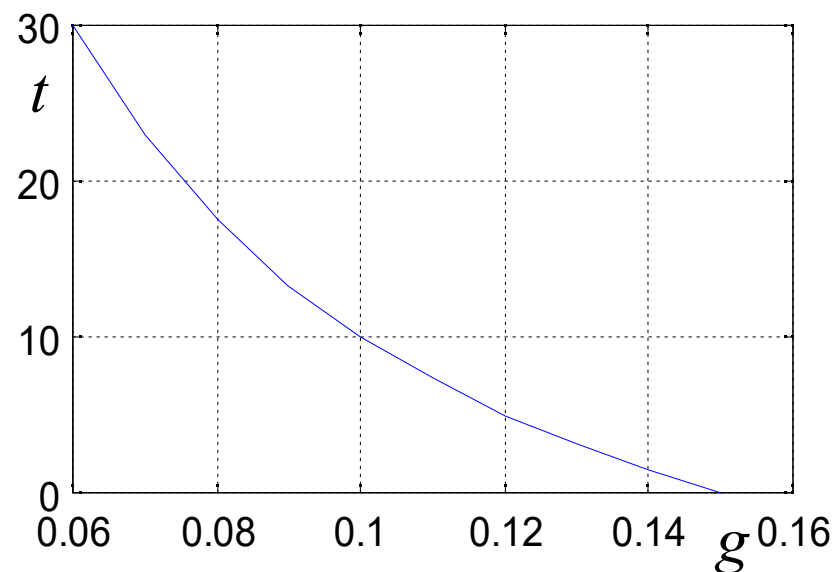
● 设 $r=2$ 不变

$$t = \frac{3 - 20g}{g}, \quad 0 \leq g \leq 0.15$$

t 对 r 的 (相对) 敏感度

$$S(t, g) = \frac{\Delta t / t}{\Delta g / g} \approx \frac{dt}{dg} \frac{g}{t}$$

$$S(t, g) = -\frac{3}{3 - 20g} = -3$$



生猪价格每天的降低量 g 增加 1%，出售时间提前 3%。

生猪的出售时机

强健性分析



研究 r, g 不是常数时对模型结果的影响

$$w=80+rt \rightarrow w = w(t)$$

$$p=8-gt \rightarrow p = p(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = p(t)w(t) - 4t$$

$$Q'(t) = 0 \Rightarrow p'(t)w(t) + p(t)w'(t) = 4$$

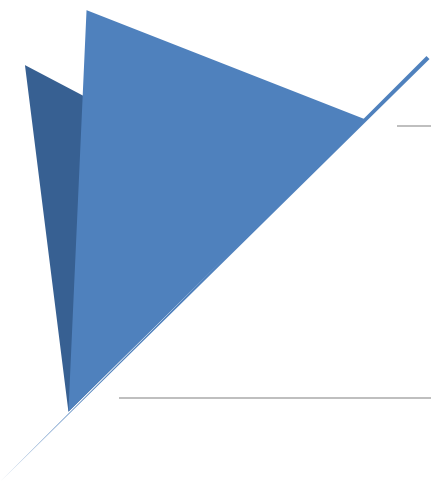
每天利润的增值

每天投入的资金

保留生猪直到利润的增值等于每天的费用时出售

由 $S(t,r) = 3$ 若 $1.8 \leq w' \leq 2.2$ (10%), 则 $7 \leq t \leq 13$ (30%)

建议过一周后 ($t=7$) 重新估计 p, p', w, w' 再作计算。



易拉罐形状和尺寸的最优设计

/

易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题描述

全国大学生数学建模竞赛2006年C题

我们只要稍加留意就会发现销量很大的饮料 (例如饮料量为355毫升的可口可乐、青岛啤酒等)的饮料罐(即易拉罐)的形状和尺寸几乎都是一样的。看来,这并非偶然,这应该是某种意义下的最优设计。当然,对于单个的易拉罐来说,这种最优设计可以节省的钱可能是很有限的,但是如果是生产几亿,甚至几十亿个易拉罐的话,可以节约的钱就很可观了。

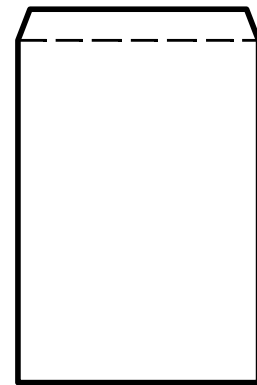
现在就请你们小组来研究易拉罐的形状和尺寸的最优设计问题。具体说,请你们完成以下的任务:



易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题描述

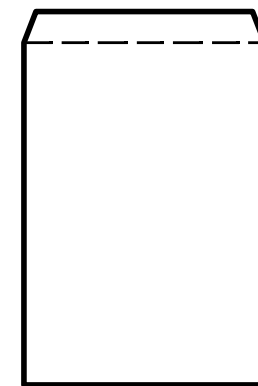
1. 取一个饮料量为355毫升的易拉罐，例如355毫升的可口可乐饮料罐，**测量**你们认为验证模型所需要的**数据**，例如易拉罐各部分的直径、高度、厚度等，并把数据列表加以说明；如果数据不是你们自己测量得到的，那么你们必须注明出处。
2. 设易拉罐是一个**正圆柱体**，什么是它的**最优设计**？其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸，例如说，**半径和高之比**，等等。



易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题描述

3. 设易拉罐的中心纵断面如图所示, 上面部分是一个**正圆台**, 下面部分是一个**正圆柱体**. 什么是它的**最优设计**? 其结果是否可以合理地说明你们所测量的易拉罐的形状和尺寸。



4. 利用你们对所测量的易拉罐的洞察和想象力, 做出你们自己的关于**易拉罐形状和尺寸的最优设计**.

5. 用你们做本题及以前学习和实践数学建模的亲身体验, 写一篇短文(不超过1000字, 你们的论文中必须包括这篇短文), 阐述**什么是数学建模, 它的关键步骤及难点**.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题分析

导数应用中的极值问题

设计一个容积固定、有盖的圆柱形容器, 若侧壁及底、盖厚度都相同, 问容器高度与底面半径之比为多少, 所耗材料最少?

侧壁及底、盖厚度相同

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

r ~ 底面半径. h ~ 高度.

$$V = \pi r^2 h$$

S ~ 表面积. V ~ 容积

V 固定, 求 r , h 满足什么关系使 S 最小.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题分析

微分法求解

$r \sim$ 底面半径. $h \sim$ 高度. $S \sim$ 表面积. $V \sim$ 容积.

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



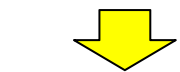
$$S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

求导 S' 令 $S'=0$

$$V = \pi r^2 h$$



$$h = V / \pi r^2$$



$$h = 2r$$

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$



$$V / \pi r^2 = 2r$$

容器高度与底面直径相等时所耗材料最少.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

问题分析

问题分析 容器高度与底面直径相等时所耗材料最少.

通常易拉罐的高度比底面直径大得多.

如果只考虑节省材料

罐底、盖厚度比侧壁大



增加高度、减少底面直径

题目要求测量数据



得到底、盖、侧壁的厚度

正圆柱体利用简单几何知识建模.

圆柱体上面有一个小圆台. 小圆台改为小球台.



易拉罐形状和尺寸的最优设计

数据测量：易拉罐各项尺寸(mm)



从罐的外部进行测量

5只罐子的平均值

罐高	圆柱高	圆台高	圆柱直径	顶盖直径	罐壁厚	顶盖厚	罐底厚	罐内容积
120.6	110.5	10.1	66.1	60.1	0.103	0.306	0.300	364.8cm ³

圆台高不到圆柱高的10%

顶盖与圆柱直径相差10%

罐底、盖的厚度约为罐壁的3倍

圆台近似作圆柱处理误差很小.

优化设计与普通的极值问题有别.

罐高约为圆柱直径的2倍，与日常所见相符.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

圆柱模型

小圆台近似于圆柱，直径相同

所耗材料的体积 = 侧壁、底、盖面积 × 厚度

r ~ 圆柱半径. h ~ 圆柱高度. b ~ 侧壁厚度. kb ~ 罐底厚度. k_1b ~ 罐盖厚度.

SV_1 ~ 材料体积. V_1 ~ 罐的容积

$$SV_1 = 2\pi r h b + \pi r^2 (kb + k_1 b)$$

$$V_1 = \pi r^2 h$$

b, k, k_1 已知

V_1 固定, 求 r, h 满足什么关系使 SV_1 最小.

注: $b \ll r, h$, 模型中略去 b 的二次、三次项.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

圆柱模型

$$SV_1 = 2\pi r h b + \pi r^2 (k b + k_1 b) \quad V_1 = \pi r^2 h$$

极值问题微分法求解



$$h = (k + k_1)r$$

测量数据——底、盖厚度约为罐壁的3倍.

⇒ $h=6r$, 圆柱高度为直径的3倍.

与测量数据和日常所见不符.

- 厚度测量存在较大误差.
- 实际加工制作存在节省材料之外的其他原因.

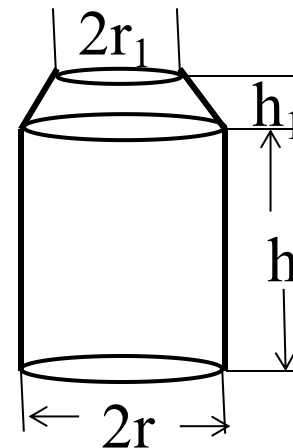
易拉罐形状和尺寸的最优设计

圆台模型

顶部小圆台下面与圆柱相接

b ~ 侧壁厚度. kb ~ 罐底厚度. k_1b ~ 罐盖厚度.

SV_2 ~ 材料体积. V_2 ~ 罐的容积.



$$SV_2 = 2\pi r h b + \pi r^2 k b + \pi r_1^2 k_1 b + \pi \sqrt{(r - r_1)^2 + h_1^2} (r + r_1) b$$

$$V_2 = \pi r^2 h + \pi h_1 (r^2 + r_1^2 + r r_1) / 3 \quad b, k, k_1 \text{ 已知}$$

V_2 固定, 求 r, h, r_1, h_1 满足什么关系使 SV_2 最小.

易拉罐形状和尺寸的最优设计

圆台模型

圆台模型

$$V_2 = \pi r^2 h + \pi h_1 (r^2 + r_1^2 + rr_1) / 3$$

$$SV_2 = 2\pi r h b + \pi r^2 k b + \pi r_1^2 k_1 b + \pi \sqrt{(r - r_1)^2 + h_1^2} (r + r_1) b$$

V_2 固定, 求 r, h, r_1, h_1 满足什么关系使 SV_2 最小.

约束极小问
题的数值解

$$\begin{aligned} \min & SV_2(r, h, r_1, h_1) \\ \text{s.t.} & V_2(r, h, r_1, h_1) = V_0 \\ & r > 0, h > 0, r_1 > 0, h_1 > 0 \end{aligned}$$

b, k, k_1, V_0 已知

软件编程计算

圆台退化为圆锥.

$$r=31.43, h=108.34, r_1=0, h_1=28.10 \text{ (mm)}$$

易拉罐形状和尺寸的最优设计

圆台模型

圆台退化为圆锥.

结果分析

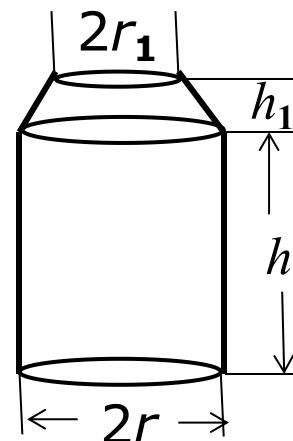
假定圆台侧壁厚度 $=b$, 罐盖厚度 $k_1b = 3b$.为节省材料需尽量减少罐盖面积. $\Rightarrow r_1 = 0$

改进

罐盖要安装拉环及工艺、美观等因素.

 $\Rightarrow$ 半径 r_1 应有下限 (设 $r_1 \geq 20$)

求解

 $r = 31.62, h = 104.52, r_1 = 20, h_1 = 17.29(\text{mm})$ 

易拉罐形状和尺寸的最优设计

球台模型

顶部小圆台改为球台

b ~侧壁厚度. kb ~罐底厚度. k_1b ~罐盖厚度.

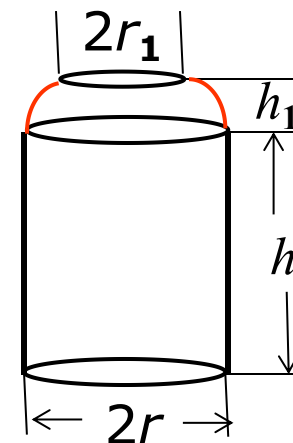
SV_3 ~材料体积. V_3 ~罐的容积.

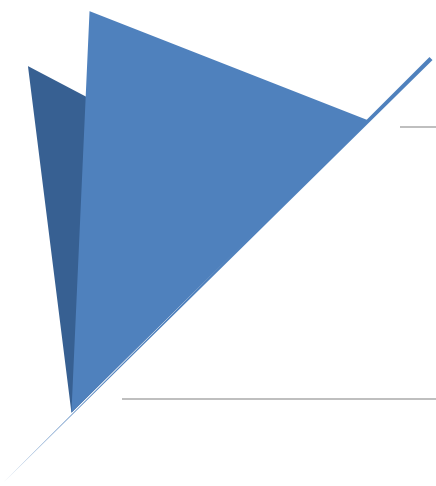
$$SV_3 = 2\pi r h b + \pi r^2 k b + \pi r_1^2 k_1 b + \pi b \sqrt{4r^2 h_1^2 + (r^2 - r_1^2 - h_1^2)^2}$$

$$V_3 = \pi r^2 h + \pi h_1 (3r^2 + 3r_1^2 + h_1^2) / 6$$

V_2 固定, 求 r, h, r_1, h_1 满足什么关系使 SV_2 最小.

对半径 r_1 加以限制, 求数值解.





公平的席位分配

/

公平的席位分配

问题背景

每10年，美国联邦政府进行一次全国人口普查，各州在联邦众议院的代表名额也据此重新确定。

2000年人口普查后，犹他州向联邦政府提出控诉，说分配给北卡罗莱纳州的名额应该是他们的。

事实上，过去200年来，美国国会在名额分配上打过多起法律官司，曾有过长期争论并使用过4种分配方案。

问题的数学本质是什么？

公平的席位分配问题 (apportionment)

公平的席位分配

问题背景



问题

三个系学生共200名(甲100, 乙60, 丙40), 代表会议共20席, 按比例分配, 三个系分别为10, 6, 4席.

因学生转系, 三系人数为103, 63, 34, 如何分配20席?

若代表会议增加1席, 如何分配21席?

比例加惯例

系别	学生人数	比例(%)	20席的分配		21席的分配	
			比例	结果	比例	结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.0	21

对丙系公平吗?

公平的席位分配

问题描述



模型

已知: m 方人数分别为 $p_1, p_2, \dots, p_m$, 记总人数为 $P = p_1 + p_2 + \dots + p_m$, 待分配的总席位为 N 。记 $q_i = Np_i / P$, 称为第 i 方的**份额** ($i = 1, 2, \dots, m$)

要求

已知份额向量 $q = (q_1, \dots, q_m) > 0$, 找一个非负**整数分配**向量 $n = (n_1, \dots, n_m)$, 使 **n 与 q 最接近**, 且 $n_1 + \dots + n_m = N$.

比例加惯例法

- 各方先分配 q_i 的整数部分 $[q_i]$, 总余额为
$$N' = N - \sum_{i=1}^m [q_i]$$

- 记 $r_i = q_i - [q_i]$, 则第 i 方的分配名额 n_i 为:

$$n_i = \begin{cases} [q_i] + 1, & r_i \text{ 最大的 } N' \text{ 个} \\ [q_i], & \text{其他} \end{cases}$$

公平的席位分配



问题背景

- **Hamilton (比例加惯例) 方法**: A. Hamilton提出的这种方法1792年被美国国会否决
- 1850-1900年被美国国会采用(称为**Vinton法**), 又称为**最大剩余法** (GR: Greatest Remainders) 或**最大分数法** (LF: Largest Fractions) , 等等
- **席位悖论**—总席位增加反而可能导致某州席位减少。 1880年Alabama州曾遇到, 又称**Alabama悖论**。 该方法的另一个重大缺陷**人口悖论**—某州人口增加较多反而可能该州席位减少

模型求解



Hamilton方法的不公平性

- 1. $p_1, p_2, \dots, p_m$ 不变, N 的增加会使某个 n_i 减少 (上例).
- 2. N 不变, p_i 比 p_j 的增长率大, 会使 n_i 减少 n_j 增加 (下例).

	p_i	n_i	p_i	n_i
$i=1$	103	11	114	11
$i=2$	63	7	64	6
$i=3$	34	3	34	4
和	200	21	212	21

p_i	n_i	p_i	n_i
103	10	114(+10.6%)	11
63	6	63	6
34	4	38(+11.8%)	3
200	20	215	20

公平的席位分配

模型求解



“公平” 分配方法

	人数	席位
A方	p_1	n_1
B方	p_2	n_2

衡量公平分配的数量指标

当 $p_1/n_1 = p_2/n_2$ 时, 分配公平

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 对 A 不公平

$p_1/n_1 - p_2/n_2 \sim$ 对A的绝对不公平度

$$p_1=150, n_1=10, p_1/n_1=15$$

$$p_2=100, n_2=10, p_2/n_2=10$$

$$p_1/n_1 - p_2/n_2 = 5$$

虽二者的绝对不公平度相同

$$p_1=1050, n_1=10, p_1/n_1=105$$

$$p_2=1000, n_2=10, p_2/n_2=100$$

$$p_1/n_1 - p_2/n_2 = 5$$

但后者对A的不公平程度已大大降低!

公平的席位分配

模型求解



“公平” 分配方法

将绝对度量改为相对度量

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 定义

$$\frac{p_1 / n_1 - p_2 / n_2}{p_2 / n_2} = r_A(n_1, n_2)$$

~ 对A的相对不公平度

类似地定义 $r_B(n_1, n_2)$

公平分配方案应使

r_A, r_B 尽量小

将一次性的席位分配转化为动态的席位分配, 即

设A, B已分别有 n_1, n_2 席, 若增加1席, 问应分给A, 还是B?

不妨设分配开始时 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 即对A不公平.

公平的席位分配

模型求解



讨论以下几种情况

设初始 $p_1/n_1 > p_2/n_2$

- 1) 若 $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$, 则这席应给 A
- 2) 若 $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$, 应计算 $r_B(n_1+1, n_2)$
- 3) 若 $p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$, 应计算 $r_A(n_1, n_2+1)$

问: $p_1/n_1 < p_2/(n_2+1)$ 是否会出现? 否!

若 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$, 则这席应给 A

若 $r_B(n_1+1, n_2) > r_A(n_1, n_2+1)$, 则这席应给 B

公平的席位分配

模型求解



当 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$, 该席给A

由 r_A, r_B 的定义

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

该席给A

否则, 该席给B

定义

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i = 1, 2,$$

该席给Q值较大的一方

推广到m方分配席位

计算

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

该席给Q值最大的一方

相等比例法, 即EP法(Huntington, 1921)

公平的席位分配

模型求解



三系用EP方法重新分配 21个席位

一席一席地将前19席分配完毕后的结果

甲系: $p_1=103, n_1=10$ 乙系: $p_2=63, n_2=6$ 丙系: $p_3=34, n_3=3$

与Hamilton法结果相同

第20席

$$Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.4, \quad Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5, \quad Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3$$

 Q_1 最大,
第20席给甲系

第21席

$$Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.4, \quad Q_2, Q_3 \text{ 同上}$$

 Q_3 最大, 第21席给丙系

EP方法分配结果

甲系11席, 乙系6席, 丙系4席

公平吗?

公平的席位分配

模型求解



● 除数法 (Huntington, 1921)

EP法每增加1席地计算, 不会出现席位悖论和人口悖论.

有没有其他的不公平度衡量指标?

20世纪20年代哈佛大学E.V. Huntington 做了系统研究.

- ✓ 对于非负整数 n 定义一个非负单调增函数 $d(n)$
- ✓ 当总席位为 s 时第 i 方分配的席位记作 $f_i(p, s)$, $f_i(p, 0)=0$
- ✓ 让 s 每次1席地递增至 N , 按照以下准则分配:

$$\text{记 } n_i = f_i(p, s), \text{ 若 } p_k / d(n_k) = \max_{i=1,2,\dots,m} p_i / d(n_i)$$

则令 $f_k(p, s+1) = n_k + 1$, $f_i(p, s+1) = n_i$ ($i \neq k$)

公平的席位分配

5 种除数法

$$n \leq d(n) \leq n + 1$$

Huntington除数法	除数 $d(n)$	不公平度的度量指标 (设 $p_i/n_i \geq p_j/n_j$)	以人名命名称谓
最大除数法 (GD: Greatest divisors)	$n+1$	$n_j p_i / p_j - n_i$	Jefferson; Seaton; d'Hondt
主要分数法 (MF: Major fraction)	$n+1/2$	$n_j / p_j - n_i / p_i$	Webster
相等比例法 (EP: Equal proportions)	$\sqrt{n(n+1)}$	$n_j p_i / n_i p_j - 1$	Hill
调和平均法 (HM: Harmonic mean)	$2n(n+1) / (2n+1)$	$p_i / n_i - p_j / n_j$	Dean
最小除数法 (SD: Smallest divisors)	n	$n_j - n_i p_j / p_i$	Adams

EP(几何平均)

$$d(n) = \sqrt{n(n+1)}$$

MF(算术平均)

$$d(n) = n + 0.5$$

HM(调和平均)

$$d(n) = 2n(n+1) / (2n+1)$$

公平的席位分配

5 种除数法：一个数值例子



	p_i	q_i	GD	MF	EP	HM	SD
A	9061	9.061	10	9	9	9	9
B	7179	7.179	7	8	7	7	7
C	5259	5.259	5	5	6	5	5
D	3319	3.319	3	3	3	4	3
E	1182	1.182	1	1	1	1	2
总和	26000	26	26	26	26	26	26

一般情况下，偏向程度也按照表中的顺序：

- GD偏向人数 p_i 较大的一方
- SD偏向人数 p_i 较小的一方

公平的席位分配

公平的席位分配：优化模型



- 最大剩余法(GR)实际上解决了以下优化问题：

$$\min_{n \in \Omega} \|n - q\| = \left\{ \sum_{i=1}^m |n_i - q_i|^t \right\}^{1/t}$$

$$\Omega = \left\{ n \mid \sum_{i=1}^m n_i = N, n \geq 0 \text{ 且为整数向量} \right\}$$

任意 l_t 范数($t \geq 1$), 如: 1, 2, ∞ 范数

$$\min_{n \in \Omega} \sum_{i=1}^m |n_i - q_i|$$

$$\min_{n \in \Omega} \sum_{i=1}^m (n_i - q_i)^2$$

$$\min_{n \in \Omega} \max_i |n_i - q_i|$$

- MF法: $\min_{n \in \Omega} \sum_{i=1}^m [(n_i - q_i)^2 / q_i] \Leftrightarrow \min_{n \in \Omega} \sum_{i=1}^m p_i (n_i / p_i - N / P)^2$
- EP法: $\min_{n \in \Omega} \sum_{i=1}^m [(n_i - q_i)^2 / n_i] \Leftrightarrow \min_{a \in \Omega} \sum_{i=1}^m n_i (p_i / n_i - P / N)^2$

你能证明这些结论吗?

公平的席位分配

模型的公理化研究



- EP方法比最大剩余法(GR)更公平吗?

已知总席位数 s , 人口向量 $p=(p_1, p_2, \dots, p_m)$, $P=\sum p_i$

份额向量 $q = (q_1, \dots, q_m)$, $q_i = sp_i / P$

$n_i = f_i(p, s)$ 表示人数为 p , 总席位为 s 时分配给第 i 方席位

- 关键性质

$$1) \lfloor q_i \rfloor \leq n_i \leq \lceil q_i \rceil + 1 (i = 1, \dots, m) \quad \sim \text{份额性}$$

$$2) f_i(p, s) \leq f_i(p, s+1) \quad \sim \text{席位单调性}$$

$$3) \text{若 } p_i' / p_j' \geq p_i / p_j, \text{ 则 } f_i(p', s) \geq f_i(p, s), \text{ 或 } f_j(p', s) \leq f_j(p, s) \quad \sim \text{人口单调性}$$

公平的席位分配

模型的公理化研究



- GR方法满足性质 1, 但不满足性质2, 3.
- 除数方法满足性质2, 3, 但不满足性质1 .

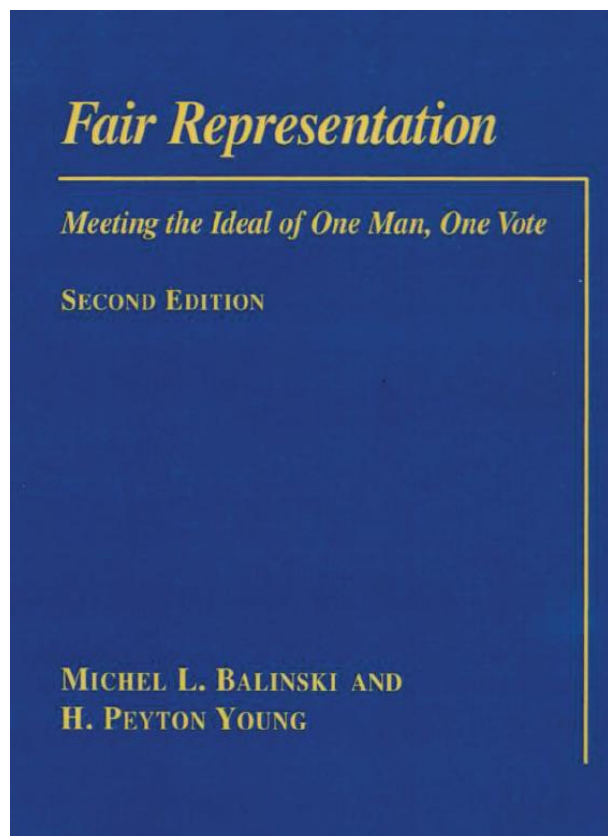
i	p_i	q_i	GD	MF	EP	HM	SD	GR
1	91490	91.49	94	93	90	89	88	92
2	1660	1.66	1	2	2	2	2	2
3	1460	1.46	1	1	2	2	2	2
4	1450	1.45	1	1	2	2	2	1
5	1440	1.44	1	1	2	2	2	1
6	1400	1.40	1	1	1	2	2	1
7	1100	1.10	1	1	1	1	2	1
	100000	100	100	100	100	100	100	100

公平的席位分配

模型的公理化研究



已经证明：对于 $m \geq 4$, $N \geq m+3$, 不存在满足3条性质(份额性、席位单调性、人口单调性) 的分配方法.



可以找到同时满足份额性和席位单调性的方法.

关于席位分配问题的历史发展状况、数学研究方法的完整叙述: M.L.Balinski & H.P.Young,

Fair Representation

2001年第2版

席位分配问题评述



- 建立“公平分配席位”模型的关键是建立衡量公平程度的数量指标.
- 如果采用公理化方法——提出公平分配席位的理想化原则，那么该问题尚未彻底解决——已证明不存在满足一组公理的席位分配方法.
- 人们提出过上百种方法，还研究、比较过方法的相容性、稳定性、无偏性等.
- 对各种方法违反某条公理的概率也有研究（仿真）
- 上述讨论可推广到 m 变化的情形、有上下限的情形等.

公平的席位分配

历史资料及权力指标



- 美国国会实际采用过的方法：

1830年前采用GD

1840年采用MF

1850-1900年采用GR (有时辅以调整)

1910年采用MF

1920年没有重新分配席位

1930年后采用EP

相关问题：得到席位，
就意味着有权力吗？



投票规则；权力指标



计量政治学



历史资料及权力指标

- 美国国会实际采用过的方法：

1830年前采用GD

1840年采用MF

1850-1900年采用GR (有时辅以调整)

1910年采用MF

1920年没有重新分配席位

1930年后采用EP

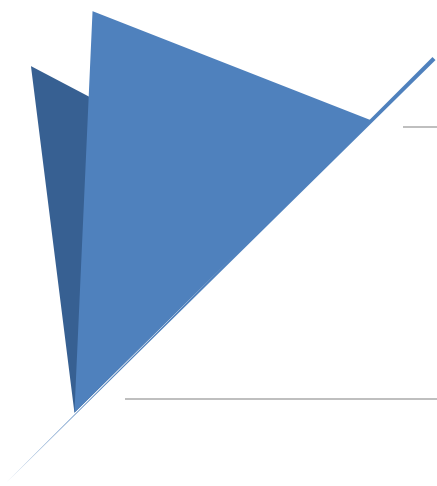
相关问题：得到席位，就意味着有权力吗？



投票规则；
权力指标



计量政治学



社会经济系统的冲量过程

/

社会经济系统的冲量过程

例 能源利用系统的预测

v_1 —能源利用量; v_2 —能源价格;
 v_3 —能源生产率; v_4 —环境质量;
 v_5 —工业产值; v_6 —就业机会;
 v_7 —人口总数。

系统的元素——图的顶点

带符号的有向图

元素间的影响——带方向的弧

影响的正反面——弧旁的+、-号

影响——直接影响

符号——客观规律; 方针政策

社会经济系统的冲量过程

例 能源利用系统的预测

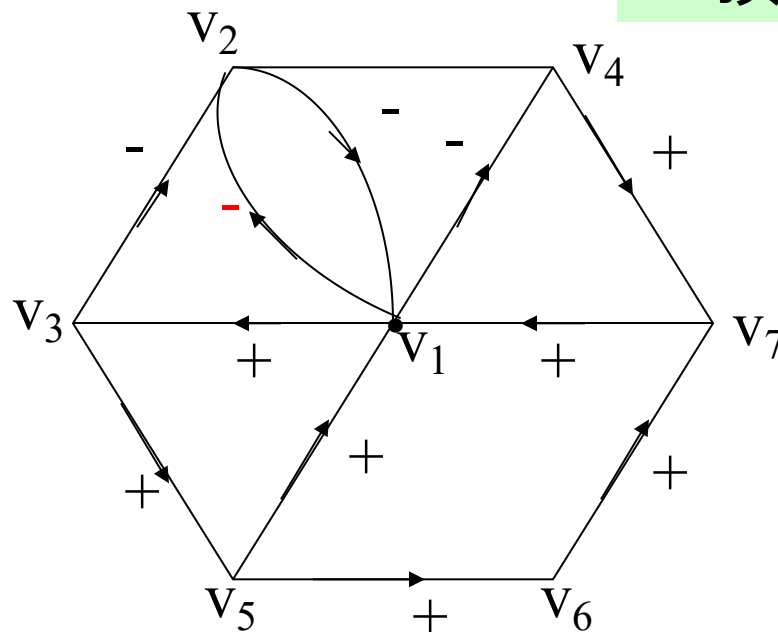
带符号有向图 $G_1=(V,E)$ 的邻接矩阵 A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i v_j \text{ 为 } + \\ -1, & \text{若 } v_i v_j \text{ 为 } - \\ 0, & \text{若 } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定性模型

$V \sim$ 顶点集 $E \sim$ 弧集



带符号的有向图 G_1

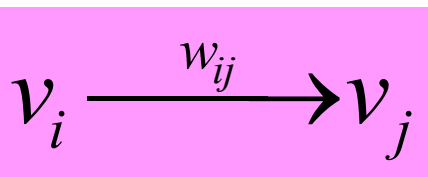
$$v_i \xrightarrow{+} v_j$$

某时段 v_i 增加导致下时段 v_j 增加减少

社会经济系统的冲量过程

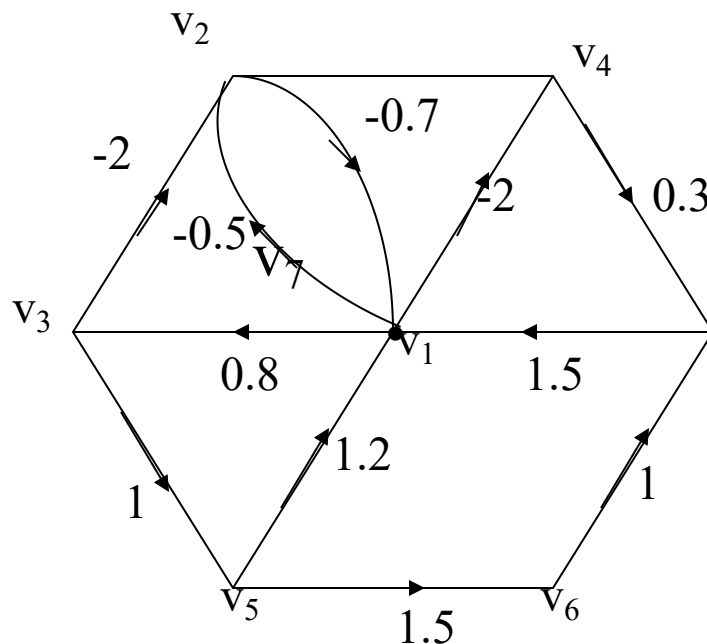
例 能源利用系统的预测

加权有向图 G_2 及其邻接矩阵 W



某时段 v_i 增加1单位导致下时段 v_j 增加 w_{ij} 单位

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.8 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



加权有向图 G_2

定量模型

A 视为 W 的特例

社会经济系统的冲量过程

能源利用系统的预测

简单冲量过程——初始冲量 $p(0)$ 中
某个分量为1, 其余为0的冲量过程

$$v(t + 1) = v(t) + p(t + 1)$$
$$p(t + 1) = p(t)A$$

设 $v(0) = p(0)$

若开始时能源利用量有突然增加, 预测系统的演变

能源利用系统的 $p(t)$ 和 $v(t)$

t	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	-1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	0	1	0	-1	2	-2	1	-1	1	0	-1
3	1	-1	1	-1	0	1	0	3	-3	2	-2	1	1	-1
	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•		

社会经济系统的冲量过程

简单冲量过程S的稳定性

- 任意时段S的各元素的值和冲量是否为有限(稳定)
- S不稳定时如何改变可以控制的关系使之变为稳定

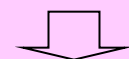
$$p(t+1) = p(t)W$$

$$v(t+1) = v(t) + p(t+1)$$

S **冲量稳定** ~ 对任意 i, t , $|p_i(t)|$ 有界

S **值稳定** ~ 对任意 i, t , $|v_i(t)|$ 有界

值稳定



冲量稳定

$$p(t) = p(0)W^t \quad \Rightarrow \quad \text{S的稳定性取决于} W \text{的特征根}$$

记W的非零特征根为 λ

社会经济系统的冲量过程

简单冲量过程S的稳定性

- S冲量稳定 $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$
- S冲量稳定 $\Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$ 且均为单根
- S值稳定 $\Leftrightarrow$ S冲量稳定且 λ 不等于1

对于能源利用系统的邻接矩阵A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - 1)$$

$$f(1) = -2, f(2) = 76 \Rightarrow \exists \lambda \in (1, 2)$$

能源利用系统存在冲量不稳定的

简单冲量过程

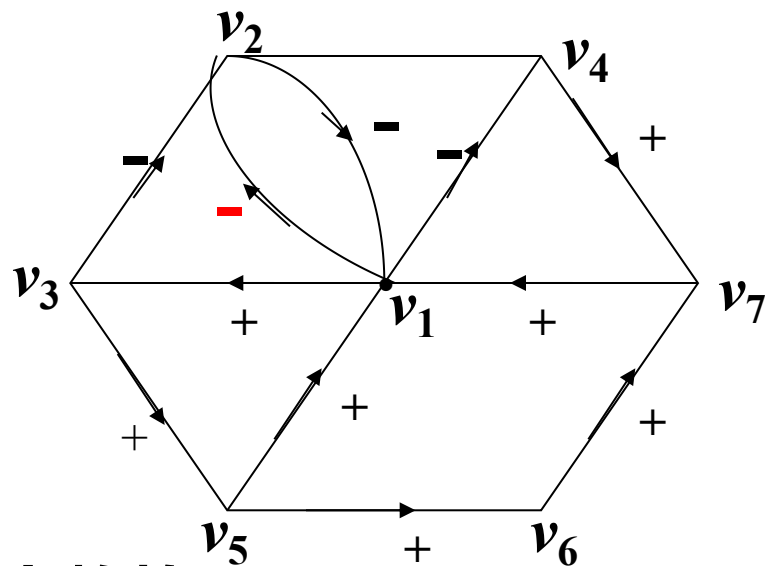
社会经济系统的冲量过程

简单冲量过程的稳定性

改进的玫瑰形图 S^* ~ 带符号的有向图双向连通,
且存在一个位于所有回路上的中心顶点。

回路长度 ~ 构成回路的边数

回路符号 ~ 构成回路的各有向边符号+1或-1之乘积



a_k ~ 长度为 k 的回路符号和

r ~ 使 a_k 不等于 0 的最大整数

• S^* 冲量稳定 $\Rightarrow a_r = \pm 1$,

$$a_k = -a_r \cdot a_{r-k} \quad (k=1, 2, \dots, r-1)$$

• 若 S^* 冲量稳定, 则 S^* 值稳定 $\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^r a_k \neq 1$$

社会经济系统的冲量过程

简单冲量过程 S^* 的稳定性

$$a_1 = 0, a_2 = (-1)_{v_1 v_2} \times (-1)_{v_2 v_1} = 1$$

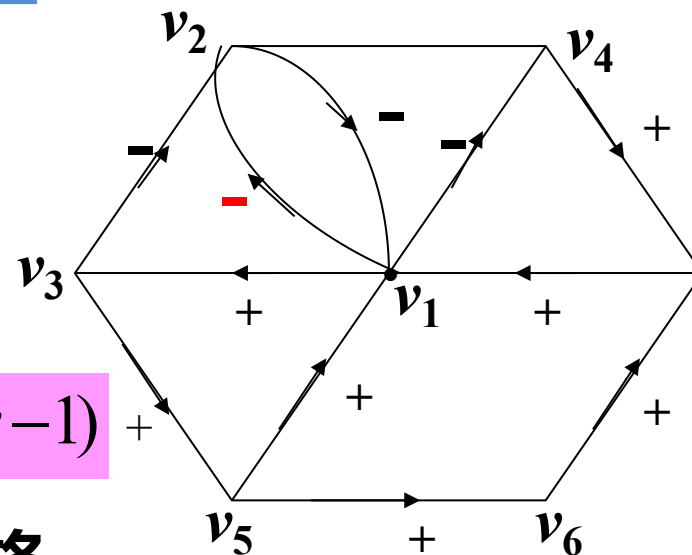
$$a_3 = (+1)_{v_1 v_3 v_5 v_1} + (-1)_{v_1 v_4 v_7 v_1} + (+1)_{v_1 v_3 v_2 v_1} = 1,$$

$$a_4 = 0, a_5 = 1, r = 5$$

$$\bullet S^* \text{冲量稳定} \Rightarrow a_r = \pm 1, a_k = -a_r \cdot a_{r-k} \quad (k=1, 2, \dots, r-1)$$

$$a_2 \neq -a_5 \cdot a_3 \Rightarrow S^* \text{冲量不稳定}$$

$v_1 \sim$ 利用量, $v_2 \sim$ 价格



$$(-1)_{v_1 v_2} \rightarrow (+1)_{v_1 v_2} \text{ (由鼓励利用变为限制利用)} \Rightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow \Lambda \text{的特征多项式} \quad f(\lambda) = \lambda^2 (\lambda^5 + \lambda^3 - \lambda^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 0, 1, \pm i, (-1 \pm \sqrt{3}i) / 2 \quad \Rightarrow S^* \text{冲量稳定}$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1 \text{ 且为单根} \quad \bullet S^* \text{冲量稳定} \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1 \text{ 且均为单根}$$

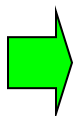
社会经济系统的冲量过程

冲量过程 (Pulse Process)

• S^* 冲量稳定 $\Rightarrow a_r = \pm 1, a_k = -a_r \cdot a_{r-k} (k=1,2,\dots,r-1)$

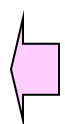
• 若 S^* 冲量稳定, 则 S^* 值稳定 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^r a_k \neq 1$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{0, -1, 1, 0, 1\}$$



S^* 值不稳定

S^* 值
稳定



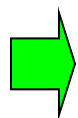
$$a_3, a_5 = 1 \Rightarrow a_3, a_5 = -1$$



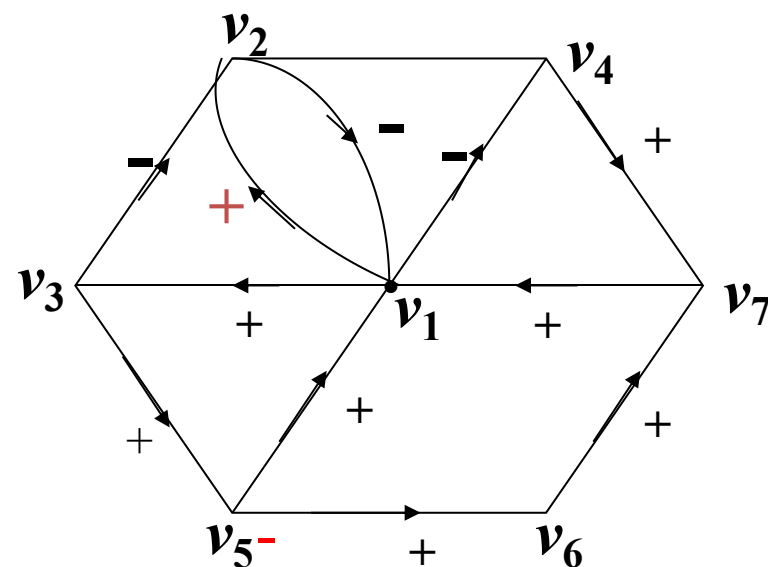
$$(+1)_{v_3 v_5} \rightarrow (-1)_{v_3 v_5}$$

v_3 —能源生产率

v_5 —工业产值



$(-1)_{v_3 v_5}$ 违反客观规律



能源利用系统的值不应稳定?

易拉罐形状和尺寸的最优设计

小结与评注

- 从日常生活中发现与数学课本类似问题的结果有不同之处,在实践(测量数据)基础上给以分析和解决,有利于培养数学建模的意识和能力.
- 建模经过了从圆柱到圆台和球台、从材料厚度相同到不同、从解析解到数值解的过程,对于学习数学建模方法有启示和指导意义.
- 即使像易拉罐形状和尺寸设计这样简单的问题,单靠数学也不能得到圆满解决,要考虑工艺、美观及使用方便等因素,才能满足人们的需要.

读万卷书 行万里路 只为最好的修炼



QQ: 14777591 (宇宙骑士)

Email: ouxinyu@alumni.hust.edu.cn

Website: <http://ouxinyu.cn>

Tel: 18687840023

地址: 云南财经大学南院 智能应用研究院A306-2

云南财经大学北院 信息学院卓远楼A406